

# **Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik**

Vierte, erweiterte Auflage

# Inhaltsverzeichnis

<i>Kapitel</i>	<b>Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume</b>	. . . . .	1
§ 1	Modelle für Zufallsexperimente, Abzählmethoden	. . . . .	1
1.1	Endliche Wahrscheinlichkeitsräume	. . . . .	2
1.2	Einfache Urnenmodelle	. . . . .	7
1.3	Anwendungsbeispiele	. . . . .	10
1.4	Die hypergeometrische Verteilung	. . . . .	12
1.5	Vereinigungen von Ereignissen	. . . . .	13
1.6	Multinomialkoeffizienten	. . . . .	14
1.7	Runs	. . . . .	15
1.8	Einfache Identitäten für Binomialkoeffizienten	. . . . .	16
	Anhang	. . . . .	17
	Aufgaben	. . . . .	20
§ 2	Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit	. . . . .	21
2.1	Definition und Eigenschaften bedingter Wahrscheinlichkeiten	. . . . .	21
2.2	Unabhängigkeit	. . . . .	25
2.3	Produktexperimente	. . . . .	28
2.4	Einige Verteilungen für Produktexperimente	. . . . .	30
2.5	Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume	. . . . .	32
2.6	Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsräumen aus bedingten Wahrscheinlichkeiten	. . . . .	33
2.7	Austauschbare Verteilungen	. . . . .	35
2.8	Genetische Modelle	. . . . .	36
2.9	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Scheinkorrelationen	. . . . .	38
	Anmerkungen	. . . . .	40
	Aufgaben	. . . . .	41
§ 3	Zufallsvariable, Erwartungswert, Varianz	. . . . .	43
3.1	Verteilungen von Zufallsvariablen	. . . . .	43
3.2	Unabhängigkeit	. . . . .	46
3.3	Erwartungswerte	. . . . .	47
3.4	Das Rechnen mit Indikatorfunktionen	. . . . .	50
3.5	Varianz und Kovarianz	. . . . .	54
3.6	Das schwache Gesetz der großen Zahlen	. . . . .	58
	Aufgaben	. . . . .	60
§ 4	Grundbegriffe der Schätztheorie	. . . . .	62
4.1	Der allgemeine Rahmen von Schätzproblemen	. . . . .	63
4.2	Maximum — Likelihood — Schätzer	. . . . .	64
4.3	Erwartungstreue	. . . . .	66
4.4	Der mittlere quadratische Fehler	. . . . .	68
4.5	Die Informations-Ungleichung	. . . . .	69
4.6	Konsistenz	. . . . .	70
4.7	Konfidenzintervalle	. . . . .	71
	Aufgaben	. . . . .	77

§ 5	Approximationen der Binomialverteilung	78
5.1	Approximation von $n\backslash$ und $b_{np}(k)$ .	78
5.2	Der Satz von de Moivre-Laplace.	83
5.3	Anwendungen.	85
5.4	Die Poisson-Approximation.	88
	Anhang	92
	Aufgaben.	94
§ 6	Tests	95
6.1	Beispiel der „tea tasting Lady“.	95
6.2	Grundbegriffe der Testtheorie.	97
6.3	Mehr zur „tea tasting Lady“.	98
6.4	Ein verfeinertes Modell für den Tee-Test.	100
6.5	Beispiel des Testens der Existenz von außersinnlicher Wahrnehmung	102
6.6	Eine Erweiterung des Testbegriffs: Randomisierte Tests.	103
6.7	Tests einfacher Hypothesen gegen einfache Alternativen.	104
6.8	Anwendung auf zusammengesetzte Alternativen.	106
6.9	Allgemeine Hinweise zur Testtheorie.	107
6.10	p-Werte.	108
	Aufgaben.	109
§ 7	Erzeugende Funktionen	110
	Verzweigungsprozesse.	114
	Aufgaben.	116
§ 8	Entropie und Kodierung	118
8.1	Der Quellen-Kodierungssatz.	119
8.2	Anwendung auf mehrstufige Zufallsexperimente.	122
	Aufgaben.	124
	<b>Kapitel! Allgemeine Modelle</b>	125
§ 9	Wahrscheinlichkeitsmaße mit Dichten	125
9.1	$\sigma$ -Algebren und allgemeine Wahrscheinlichkeitsmaße.	125
9.2	Beispiele von Verteilungen mit Dichten.	129
	Anhang	134
	Aufgaben.	136
§ 10	Zufallsvariable und ihre Momente	137
10.1	Meßbare Funktionen.	137
10.2	Verteilungen von Zufallsvariablen.	139
10.3	Unabhängigkeit	140
10.4	Erwartungswerte.	143
10.5	Mehrdimensionale Dichtetransformation und Normalverteilung.	145
	Aufgaben *	148
§ 11	Grenzwertsätze	150
11.1	Das starke Gesetz der großen Zahlen.	150
11.2	Normale Zahlen.	154
11.3	Der Zentrale Grenzwertsatz	156
	Anhang	160
	Aufgaben.	151

§ 12 Schätzverfahren und Fehlerrechnung . . . . .162

12.1 Maximum-Likelihood-Schätzungen bei Dichten. . . . .162

12.2 Konfidenzintervalle. . . . .164

12.3 Das Fehlerfortpflanzungsgesetz. . . . .165

12.4 Die Methode der kleinsten Quadrate. . . . .166

12.5 Mediän, Ausreißer und Robuste Schätzer. . . . .168

Anhang. . . . .171

Aufgaben. . . . .172

§ 13 Einige wichtige Testverfahren . . . . .173

13.1 Der f-Test. . . . .173

13.2 Einfache Varianzanalyse. . . . .179

13.3  $\chi^2$ -Tests. . . . .181

13.4 Nichtparametrische Tests. . . . .186

Anhang. . . . .187

Aufgaben. . . . .189

*Kapitel III Markowsche Ketten* . . . . .191

§ 14 Die Markowsche Eigenschaft . . . . .191

14.1 Definition und Beispiele. . . . .191

14.2 Einfache Folgerungen aus der Markowschen Eigenschaft. . . . .193

14.3 Stationäre Übergangswahrscheinlichkeiten. . . . .194

14.4 Absorptionswahrscheinlichkeiten. . . . .196

14.5 Absorptionsverteilungen. . . . .198

Aufgaben. . . . .200

§ 15 Das Verhalten Markowscher Ketten in langen Zeiträumen . . . . .201

15.1 Ketten mit endlich vielen Zuständen. . . . .201

15.2 Kommunizierende Zustände und Periodizität. . . . .204

15.3 Rekurrenz und Transienz. . . . .206

Anhang, Aufgaben. . . . .212

§ 16 Der Erneuerungssatz . . . . .214

16.1 Die Erneuerungsgleichung. . . . .214

16.2 Anwendung auf Übergangswahrscheinlichkeiten. . . . .217

16.3 Bestimmung der  $m_Y$ . . . . .219

Aufgaben. . . . .223

§ 17 Der Poisson-Prozeß . . . . .224

17.1 Charakterisierung des Poisson-Prozesses. . . . .224

17.2 Sprungzeiten beim Poisson-Prozeß. . . . .227

Aufgaben. . . . .230

**Hinweise zum Weiterlesen. . . . .231**

**Lösungen der mit (L) gekennzeichneten Aufgaben. . . . .233**

**Literaturverzeichnis. . . . .240**

**Tabellen. . . . .243**

**Symbolverzeichnis. . . . .248**

**Namen- und Sachwortverzeichnis. . . . .249**