

H. S. M. Coxeter

Unvergängliche Geometrie

Ins Deutsche übersetzt von J. J. Burckhardt

Zweite, erweiterte und überarbeitete Auflage

**1981 Birkhäuser Verlag
Basel • Boston • Stuttgart**

PAEDAGOGISCHE HOCHSCHULE
ST.GALLEN

INHALTSVERZEICHNIS

I

t. Dreiecke		4. Zweidimensionale	
1.1 Euklid	15	<i>Kristallographie</i>	
1.2 Grundbegriffe und Axiome	16	4.1 Gitter und ihre Dirichlet-	
1.3 Die Eselsbrücke	19	Bereiche	73
1.4 Die Mittellinien und der		4.2 Die Symmetriegruppe des	
Schwerpunkt	24	allgemeinen Gitters	79
1.5 Der Inkreis und der Um-		4.3 Die Kunst von M. C. Escher	82
kreis	25	4.4 Sechs Muster aus Dominos ..	84
1.6 Die Eulerse Gerade und		4.5 Die Einschränkung der	
der Höhenschnittpunkt ..	32	Kristallographie	85
1.7 Der Neunpunktekreis	34	4.6 Regelmäßige Unterteilungen	86
1.8 Zwei Extremalaufgaben	36	4.7 Die Aufgabe von Sylvester	
1.9 Der Satz von Morley	40	über kollineare Punkte	90
2. Regelmäßige Vielecke		5. Ähnlichkeit in der Euklidi-	
2.1 Die Kreisteilung	43	<i>schen Ebene</i>	
2.2 Die Winkeldreiteilung	45	5.1 Streckungen	93
2.3 Die Bewegung	46	5.2 Ähnlichkeitszentrum	96
2.4 Die Symmetrie	47	5.3 Das Neunpunktezentrum ..	97
2.5 Die Gruppen	49	5.4 Der invariante Punkt einer	
2.6 Das Produkt zweier		Ähnlichkeit	98
Spiegelungen	51	5.5 Eigentliche Ähnlichkeit	100
2.7 Das Kaleidoskop	52	5.6 Uneigentliche Ähnlichkeit ..	101
2.8 Die Sternpolygone	55		
3. Bewegungen in der		6. Kreise und Kugeln	
<i>Euklidischen Ebene</i>		6.1 Inversion an einem Kreis ..	104
3.1 Eigentliche und uneigent-		6.2 Orthogonale Kreise	107
liche Bewegungen	59	6.3 Inversion von Geraden und	
3.2 Verschiebungen	62	Kreisen	108
3.3 Gleitspiegelung	64	6.4 Die konforme Ebene	111
3.4 Spiegelungen und Halb-		6.5 Koaxiale Kreise	114
drehungen	66	6.6 Der Kreis des Apollonius ..	118
3.5 Zusammenfassung der Er-		6.7 Kreiserhaltende Trans-	
gebnisse über Bewegungen	67	formationen	121
3.6 Der Satz von Hjelmslev	68	6.8 Inversion an einer Kugel ..	122
3.7 Streifenmuster	69	6.9 Die elliptische Ebene	123

7. <i>Bewegung und Ähnlichkeit im Euklidischen Raum</i>	7.4 Das Produkt von drei Spiegelungen	131
7.1 Eigentliche und uneigentliche Bewegungen	7.5 Die Schraubung	133
7.2 Die Punktspiegelung ..	7.6 Die Drehstreckung	134
7.3 Drehung und Verschiebung	7.7 Kugelerhaltende Transformationen	138

Teil II

8. <i>Koordinaten</i>	10. <i>Die fünf Platonischen Körper</i>
8.1 Kartesische Koordinaten	10.1 Pyramiden, Prismen und Antiprismen
8.2 Polarkoordinaten	10.2 Risse und Modelle
8.3 Der Kreis	10.3 Die Formel von Euler ..
8.4 Kegelschnitte	10.4 Radien und Winkel
8.5 Tangente, Bogenlänge und Fläche	10.5 Reziproke Polyeder ..
8.6 Hyperbolische Funktionen ..	
8.7 Die logarithmische Spirale ..	
8.8 Drei Dimensionen	
9. <i>Komplexe Zahlen</i>	11. <i>Goldener Schnitt und Phyllotaxis</i>
9.1 Rationale Zahlen	11.1 Die Teilung nach dem Extremen und dem Mittleren ..
9.2 Reelle Zahlen	11.2 De divina proportione ..
9.3 Das Argand-Diagramm ..	11.3 Die goldene Spirale ..
9.4 Modul und Argument ..	11.4 Die Fibonacci Zahlen ..
9.5 Die Formel $e^{2\pi i} + 1 = 0$..	11.5 Phyllotaxis
9.6 Wurzeln von Gleichungen ..	
9.7 Konforme Abbildungen ..	

Teil III

12. <i>Anordnungsgeometrie</i>	13.2 Streckungen
12.1 Die Ausscheidung zweier verschiedener Geometrien aus Euklid	13.3 Affinitäten
12.2 Die Zwischenbeziehung	13.4 Äquiaffine Kollineationen ..
12.3 Die Aufgabe von Sylvester über kollineare Punkte ..	13.5 Zweidimensionale Gitter ..
12.4 Ebenen und Hyperebenen ..	13.6 Vektoren und Schwerpunkte
12.5 Stetigkeit	13.7 Baryzentrische Koordinaten
12.6 Parallelität	13.8 Der affine Raum
13. <i>Affine Geometrie</i>	13.9 Dreidimensionale Gitter ..
13.1 Das Parallelenaxiom und das Axiom von Desargues ..	14. <i>Projektive Geometrie</i>
	14.1 Die Axiome der allgemeinen projektiven Ebene
	14.2 Projektive Koordinaten ..
	14.3 Der Satz von Desargues ..

14.4 Viereck und harmonische Beziehung	291	15.7 Das Polyeder-Kaleidoskop	340
14.5 Projektivität	294	15.8 Durch Inversionen erzeugte diskrete Gruppen	343
14.6 Kollineationen und Korrelationen	300	10. <i>Hyperbolische Geometrie</i>	
14.7 Der Kegelschnitt	306	16.1 Euklidisches und hyperbolisches Parallelenaxiom ..	349
14.8 Der projektive Raum	310	16.2 Die Frage der Widerspruchsfreiheit	350
14.9 Der Euklidische Raum	317	16.3 Der Parallelenwinkel	354
15. <i>Absolute Geometrie</i>		16.4 Die Endlichkeit der Dreiecke	359
15.1 Kongruenz	320	16.5 Fläche und Winkeldefekt ..	360
15.2 Parallelismus	322	16.6 Kreise, Horozykeln und äquidistante Kurven	364
15.3 Bewegung	326	16.7 Poincaré's «Halbebenen»-Modell	367
15.4 Endliche Drehgruppen	329	16.8 Die Horosphäre und die Euklidische Ebene	368
15.5 Endliche Gruppen von Bewegungen	336		
15.6 Geometrische Kristallographie	338		

Teil IV

17. <i>Differentialgeometrie der Kurven</i>		19. <i>Differentialgeometrie der Flächen</i>	
17.1 Vektoren im Euklidischen Raum	370	19.1 Die Verwendung zweier Parameter auf der Fläche ..	412
17.2 Vektorfunktionen und ihre Ableitungen	376	19.2 Richtungen auf einer Fläche	416
17.3 Krümmung, Evoluten und Evolventen	377	19.3 Normalkrümmung	420
17.4 Die Kettenlinie	382	19.4 Die Hauptkrümmungen ..	423
17.5 Die Traktrix	385	19.5 Hauptkrümmungsrichtungen und Krümmungslinien	428
17.6 Die Raumkurven	386	19.6 Nabelpunkte	432
17.7 Die gemeine Schraubenlinie	389	19.7 Die Sätze von Dupin und Liouville	433
17.8 Die allgemeine Schraubenlinie	391	19.8 Die Indikatrix von Dupin ..	436
17.9 Die Schneckenlinie	393	20. <i>Geodätische Linien</i>	
18. <i>Tensoren</i>		20.1 Theorema egregium	439
18.1 Die duale Basis	395	20.2 Die Differentialgleichungen für die geodätischen Linien	424
18.2 Der Fundamentaltensor ..	396	20.3 Die Gesamtkrümmung eines geodätischen Dreiecks	445
18.3 Reziproke Gitter	399		
18.4 Das kritische Gitter einer Kugel	403		
18.5 Allgemeine Koordinaten ..	406		
18.6 Das alternierende Symbol'..	410		

20.4 Die Charakteristik von Euler-Poincare	447	22. <i>Vierdimensionale Geometrie</i>	
20.5 Flächen konstanter Krümmung	448	22.1 Die einfachsten vierdimensionalen Figuren	476
20.6 Der Parallelenwinkel	449	22.2 Eine notwendige Bedingung für $\{p, q, r\}$	478
20.7 Die Pseudosphäre	451	22.3 Konstruktion der regulären Polytope	480
21. <i>Topologie der Flächen</i>		22.4 Dichte Packungen gleicher Kugeln	485
21.1 Orientierbare Flächen	455	22.5 Eine statistische Honigwabe	493
21.2 Nicht orientierbare Flächen	458	Tabellen	495
21.3 Regelmäßige Karten	462	Literaturverzeichnis	497
21.4 Das Vierfarbenproblem	467	Antworten zu den Übungen	502
21.5 Der Sechsfarbensatz	469	Register	547
21.6 Hinreichende Anzahl von Farben für jede Fläche	472		
21.7 Flächen, die die volle Anzahl von Farben benötigen	473		

TAFELN

I Die Gruppe pg , erzeugt durch zwei parallele Gleitspiegelungen	81
II Die Gruppe cm , erzeugt durch eine Spiegelung und eine parallele Gleitspiegelung	82
III Ein Drahtmodell des regulären 120-Zells $\{5, 3, 3\}$	483
IV Dichte Kreispackungen in der Euklidischen Ebene	485